EXAMEN PARTIEL 2

MAT-1200: Introduction à l'algèbre linéaire — Automne 2012
Date: 14 décembre.

Remarques:

- Durée de l'examen: deux heures.
- Documents admis: deux feuilles 8 1/2 × 11, recto-verso.
- Seulement les calculatrices avec l'auto-collant de la Faculté seront admises.
- Vous êtes priés de vous identifier (nom et numéro de matricule) sur le cahier et de placer votre carte d'identité sur la table à côté de vous.

Question 1. (4 + 4 + 4 + 4 + 4 points)

Pour chacun des énoncés suivants, répondre par vrai ou faux. De plus, justifier brièvement chacune de vos réponses.

a) Si une matrice carrée A de format 2×2, est multipliée par un scalaire c quelconque, on a que $\det(cA) = c\det(A)$.

b) Les vecteurs colonnes d'une matrice carrée sont linéairement indépendants si et seulement si le déterminant de cette matrice est différent de zéro.

c) Toute transformation linéaire $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ transforme un vecteur unitaire (de longueur 1) en un vecteur unitaire.

d) La transformation $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $T(x,y)^t = (x, y+1)^t$ est linéaire.

e) Le déterminant d'une matrice orthogonale A est toujours égal à 1 ou bien -1.

Question 2. (11 + 9 points)

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Evaluer le déterminant de la matrice A. Justifier chacune des étapes du calcul.

b) En effectuant le minimum de calculs, déduire les valeurs de

(i) $\det A^{-1}$

(ii) $\det A^t A$

(iii) $\det Q^t A Q$ où Q est une matrice orthogonale.

Question 3. (4 + 6 + 4 + 6 points)

On notera par W le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ définie par le plan d'équation $x + 2y - z = 0$. Sur W, on considère la base formée des deux vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Si $\vec{w} = (1, -2, -3)^t \in W$, trouver les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ dans la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

b) Orthogonaliser les vecteurs $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ afin d'obtenir une base orthonormale de W.

Par la suite, on considère la transformation linéaire $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ qui est la projection orthogonale sur la droite L de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$L = \left\{ k \, (1, 2, -1)^t \text{ pour } k \in \mathbb{R} \right\}.$$

c) Déterminer une base orthonormale $\mathcal{B} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ de sorte que la matrice représentative de T dans la base $\mathcal{B}$ s'écrive sous la forme

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Ecrire la matrice représentative de T dans la base canonique $\{(1,0,0)^t, (0,1,0)^t, (0,0,1)^t\}$.

(1/6 . 2/6 . 1)

Question 4. (4 + 4 + 6 + 4 + 2 points)

On considère les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

qui forment une base de $\mathbb{R}^2$. On introduit une transformation linéaire $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$T\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Si $\vec{w} = (1,0)^t$, trouver les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ relative à la base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

b) Evaluer $T\vec{w}$.

c) Evaluer la matrice représentative de T dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

d) Déterminer le noyau de T.

e) Quelle sera la dimension de l'image de T?

Question 5. (5 + 3 + 3 + 5 + 4 points)

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer le polynôme caractéristique $P(\lambda)$ de la matrice A.

b) Utiliser directement la définition pour montrer que $\vec{u}_1 = (1,1,0)^t$ est un vecteur propre de A. Calculer la valeur propre λ_1 correspondante au vecteur $\vec{u}_1$.

c) Utiliser directement la définition pour montrer que $\vec{u}_2 = (1,1,2)^t$ est un vecteur propre de A. Calculer la valeur propre λ_2 correspondante au vecteur $\vec{u}_2$.

d) Déterminer les espaces propres correspondants aux valeurs propres λ_1 et λ_2.

e) La matrice A est-elle diagonalisable? Si oui, trouver la matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.